# CLEAI, matematica generale, primo semestre 2003-2004
# Soluzioni degli esercizi della prova scritta del 22 luglio 2004

**Studio di funzione:**
Disegnare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) := x^2 e^{x^2}$$

**Svolgimento:**
La funzione è definita e continua su tutto $\mathbb{R}$. Dunque i limiti vanno fatti soltanto in $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{x^2} = +\infty;$$
$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{x^2} = +\infty.$$

Visti i limiti appena calcolati, deduciamo che:

- non ci sono asintoti verticali o orizzontali;
- potrebbero esserci asintoti obliqui verso $-\infty$ e $+\infty$. Ma poiché

  $$\lim_{x\to\pm\infty} (x^2 e^{x^2})/x = \lim_{x\to\pm\infty} x e^{x^2} = \pm\infty$$

  ne deduciamo che non ci sono asintoti obliqui.

La monotonia è data dal segno della derivata prima.

$$f'(x) = (x^2 e^{x^2})' = 2xe^{x^2} + x^2(2xe^{x^2}) = 2xe^{x^2}(x^2+1).$$

Il fattore $e^{x^2}$ ha segno sempre positivo, così come $x^2+1$, mentre $2x$ è positivo nell'intervallo $(0,+\infty)$. Dunque $f$ è crescente in tale intervallo, e il punto $(0, f(0) = 0)$ è un minimo locale e globale.

La concavità è data dal segno della derivata seconda.

$$f''(x) = (2xe^{x^2}(x^2+1))' = 2e^{x^2}(x^2+1) + 4x^2e^{x^2}(x^2+1) + 4x^2e^{x^2} = 2e^{x^2}(2x^4+5x^2+1).$$

Il fattore $2e^{x^2}$ ha segno sempre positivo, mentre $2x^4+5x^2+1$ è un trinomio di quarto grado riducibile a un trinomio di secondo grado con la sostituzione $t = x^2$. Ponendo $t = x^2$ in $2x^4+5x^2+1$, otteniamo $2t^2+5t+1$, che è negativo nell'intervallo $((-5-\sqrt{17})/4, (-5+\sqrt{17})/4)$, e positivo al di fuori. Poiché $\sqrt{17}$ è evidentemente più piccolo di 5, e $t = x^2$ non può essere negativo, otteniamo che $2x^4+5x^2+1$ è sempre positivo. Dunque la concavità di $f$ è rivolta sempre verso l'alto, e non ci sono flessi di alcun tipo.

Collazionando tutte le suddette informazioni, si ottiene il grafico di $f$ (figura 1).

**Studio di grafico di funzione:**

Data $f(x)$ tramite il grafico in figura 2, determinare: (a) campo d'esistenza e suoi punti di accumulazione; (b) zeri; (c) intersezioni con gli assi; (d) segno; (e) punti di discontinuità; (f) limiti; (g) asintoti; (h) punti critici; (i) monotonia; (j) estremi locali e globali; (k) tangenti destra e sinistra in 2; (l) punti di non derivabilità; (m) punti di flesso.

**Svolgimento:**

(a) CE $= [0,+\infty)$, CE$' = [0,+\infty]$.

(b) Gli zeri sono le ascisse delle intersezioni con l'asse $x$, cioé $\{0\}$.

(c) L'intersezione con l'asse $x$ e con l'asse $y$ è il punto $(0,0)$.

(d) Il segno è evidentemente sempre positivo, tranne in 0 dove $f$ si annulla.

(e) Le discontinuità vanno cercate nel campo di esistenza della funzione, e graficamente corrispondono a "salti" nel grafico. Nel nostro caso, la funzione ha una discontinuità per $x = 2$.

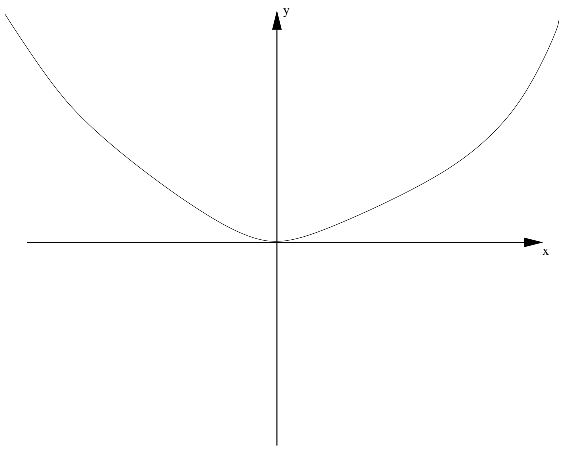


Figura 1: Grafico di $f$. Notare che essendo la funzione un prodotto di funzioni elementari continue e derivabili, non si hanno punti di discontinuità o di non derivabilità.

(f) i limiti non banali sono quelli in $(\mathrm{CE}' - \mathrm{CE}) \cup \{2\} = \{2, +\infty\}$. Passeggiando sul grafico e guardando l'asse $y$ durante la passeggiata, otteniamo:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$$
$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 3$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

(g) Non ci sono asintoti.

(h) I punti critici sono i punti in cui la tangente è orizzontale (cioé i punti in cui la derivata è zero). Non ci sono punti critici.

(i) La funzione è evidentemente monotona crescente.

(j) Essendo la funzione illimitata superiormente, non si ha massimo globale. Il punto $(0, 0)$ è il minimo globale, e quindi anche un minimo locale. Non ci sono massimi locali, perché $f$ è monotona crescente.

(k) La tangente sinistra è $y - 2 = 150(x - 2)$, la tangente destra è $y - 3 = 4(x - 2)$.

(l) Per $x = 2$ la funzione è discontinua, e questo implica la non derivabilità in $x = 2$.

(m) I flessi sono i punti in cui la concavità cambia verso, nel nostro caso il punto di coordinate $(1, 1)$.

**Massimi e minimi:**
Determinare i minimi e i massimi (locali e globali) sull'intervallo $(2, 103]$ della seguente funzione:

$$f(x) := \ln \sqrt{|x|}$$

**Svolgimento:**
Basta osservare che $f(x) = \ln \sqrt{|x|} = \frac{\ln x}{2}$ nell'intervallo $(2, 103]$ e usare la conoscenza dei grafici elementari, per ottenere un massimo globale (e locale) in $(103, \frac{\ln 103}{2})$.
**Teorico:**
Dire se $f(x) := 2 \ln \sqrt{|x|}$ assume il valore 1 nell'intervallo $[1, e^2]$ (giustificare la risposta).
**Svolgimento:**
Si, perché $1 \in [f(1) = 0, f(e^2) = 2]$ (teorema dei valori intermedi).
**Punti fissi:**
Stabilire se $f(x) := x^5 - 4x + 1$ ha punti fissi sul suo campo d'esistenza. In caso affermativo, dire quanti sono tali punti fissi e stimarli tutti con precisione di almeno un'unità.

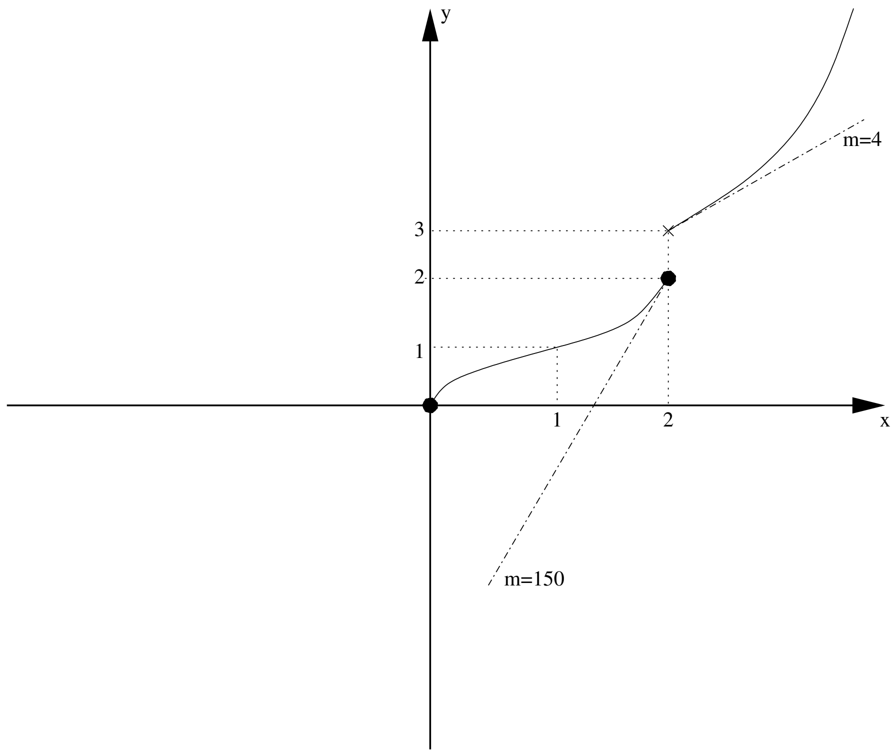


Figura 2: Da questo grafico, dedurre proprietà della funzione.

**Svolgimento:**

Il problema è equivalente a trovare e stimare gli zeri di $F(x) = x^5 - 5x + 1$. Facciamo uno studio sommario di $F$ sul suo campo d'esistenza $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} F(x) = \pm\infty;$$
$$F'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1).$$

Il segno di $F'$ ci dice che $F$ è crescente in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ e decrescente in $(-1, 1)$. Il grafico di $F$ è dato allora (a meno di derivata seconda, che non ci interessa) dalla figura 3. Dunque esistono esattamente tre zeri $x_1$, $x_2$ e $x_3$ con $x_1 \in (-2, -1)$, $x_2 \in (0, 1)$ e $x_3 \in (1, 2)$ (abbiamo calcolato $F(-2) = -21$, $F(-1) = 5$, $F(0) = 1$, $F(1) = -3$, $F(2) = 23$). I punti fissi di $f$ sono proprio $x_1$, $x_2$ e $x_3$.

**Zeri:**

Trovare i punti critici di $f(x) := x^3 - 3x + 1$.

**Svolgimento:**

I punti critici sono i punti in cui la derivata prima si annulla. Abbiamo

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$$

che ci dà $x = \pm 1$. Dunque i punti critici di $f$ sono $(-1, f(-1) = 3)$ e $(1, f(1) = -1)$.

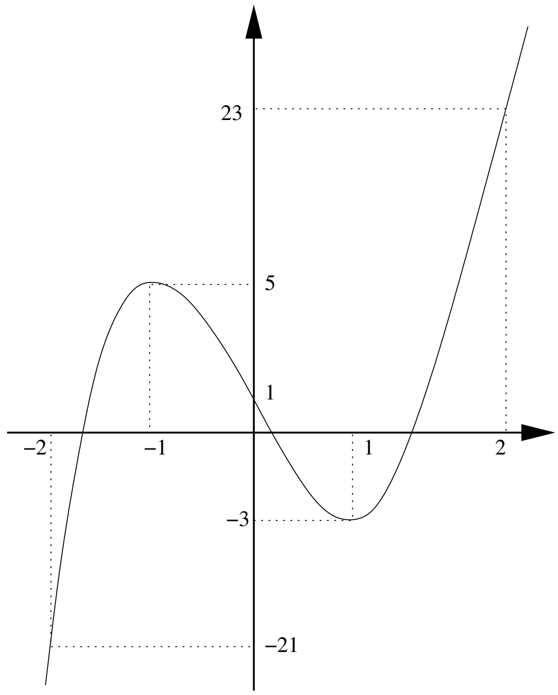


Figura 3: La funzione $F$ ha esattamente tre zeri.